Теорема *Число k-сочетаний без повторений равно*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Доказательство Каждому k-сочетанию без повторений $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ элементов множества $\{a_1, \dots, a_n\}$ соответствует столько k-размещений, сколько может быть перестановок набора индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, то есть $k!$ размещений. Таким образом:

$$A_n^k \cdot k! = C_n^k.$$

Теорема *Выражение для числа k-сочетаний с повторениями:*

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Пример Способов выбрать 20 пирожных в магазине, где продаются пирожные 4 видов, равняется:

$$\bar{C}_4^{20} = C_{23}^{20} = \frac{23!}{20!\,3!}\frac{23\cdot 22\cdot 21}{6} = 23\cdot 77.$$

Доказательство Доказательство состоит в установлении однозначного соответствия между множеством всех k-сочетаний с повторениями из n и множества всех k-сочетаний без повторений из $n+k-1$.

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — некоторый набор объектов. Каждому k-сочетанию с повторениями из этого набора можно сопоставить последовательность из нулей и единиц по следующему правилу. Сначала записываются столько единиц, сколько раз в k-сочетании встречается a_1, после этого записывается 0. Затем аналогичная процедура последовательно проводится для всех a_i $(i < n)$: записываются столько единиц, сколько раз встречается объект a_i, а вслед за ними — нуль. Для a_n записываются только единицы, но не нуль. Полученная последовательность, таким образом, содержит k единиц и $n-1$ нулей.

По построению множество последовательностей из k единиц и $n-1$ нулей может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с множеством всех k-сочетаний из n с повторениями. Количество таких последовательностей равно количеству способов выбрать k таких позиций, на которых будут поставлены единицы, из множества $n+k-1$ возможных. Таким образом, их количество равно C_{n+k-1}^k, а значит $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

1. Бином Ньютона

Комбинаторные тождества встречаются, например, в биономе Ньютона. Действительно, если рассмотреть различные натуральные степени $(x+y)^n$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x + y,\\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2,\\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,\\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,
\end{aligned}$$

можно заметить закономерности появляющихся коэффициентов, которые на самом деле являются следствием пройденного материала. Действительно, можно предположить, что они равняются биномиальным коэффициентам:

$$C_2^0 = \frac{2!}{0!\,2!} = 1, \quad C_2^1 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2, \quad C_4^2 = \frac{4}{2!\,2!} = 6.$$

Теорема

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^{n-1} x^1 y^{n-1} + C_n^n x^0 y^n =\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k x^{n-k}
\end{aligned}$$

Доказательство Можно убедиться, что при раскрытии скобок, не приводя подобные, выражение $x^k y^{n-k}$ может быть получено не единственным образом:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n} = \ldots + x^k y^{n-k} + \ldots,$$

а именно оно встретится столько раз, сколько существует способов выбрать ровно k множителей из n возможных, которые будут давать необходимую степень при x. Количество способов из n объектов $\{b_1, ..., b_n\}$ выбрать k неупорядоченных, как уже было получено, равняется C_n^k. Тогда группируя подобные, можно получить требуемое выражение:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Замечание Симметрия между двумя возможными записями бинома Ньютона обусловлена соотношением:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^{n-k}.$$