1. Формула включений и исключений.

В рамках данной лекции будет рассмотрен последний в данном курсе существенный принцип комбинаторики — формула включений и исключений.

Пример В аудитории находятся 30 человек. Каждый из присутствующих может как знать, так и не знать каждый из трех языков: английский, немецкий и французский. Пусть английским языком владают 20 из 30 человек, французским — 5 человек, немецким — также 5 человек. Одновременно Английский и Французкий знают 2 человека, Английский и Немецкий — 2 человека, Немецкий и Французкий — 1, и один человек знает все три языка. Сколько человек не знают ни одного из этих трех языков?

Для начала необходимо из 30 человек в аудитории исключить людей, которые знают какой-либо из 3ех языков:

$$\text{искомое число людей} = 30 - 20 - 5 \ldots =$$

Однако таким образом некоторые люди были исключены дважды. Чтобы компенсировать это, их количество следует прибавить:

$$= 30 - 20 - 5 - 5 + 2 + 2 + 1 \ldots$$

И в этом случае лишний раз был учтен слушатель, который знает все 3 языка. В итоге число людей, которые не знают ни одного из трех языков:

$$= 30 - 20 - 5 - 5 + 2 + 2 + 1 - 1 = 4.$$

Такое рассмотрение можно распространить на более общий случай.

Пусть $a_1, \ldots, a_N$ —абстрактный набор объектов, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — перечень свойств этих объектов, причем $N(\alpha_i)$ — количество объектов, которые обладают свойством α_i, $N(\alpha_i, \alpha_j)$ — количество объектов, которые обладают как свойством α_i, так и α_j, $N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$ — количество объектов, которые обладают одновременно тремя свойствами и так далее. $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — количество объектов, которые обладают всеми свойствами сразу.

Если с помощью штриха обозначать отрицание свойства, то требуется найти количество объектов, не обладающих никакими из свойств, $N(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$.

Теорема *Формула включений-исключений:*

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) =& N - N(\alpha_1) \cdot N(\alpha_2) - \ldots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots \\ &+ N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) - \ldots + (-1)^n \cdot N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Доказательство по индукции.

Доказательство **База индукции.** В случае $n = 1$ как N, так и $N(\alpha_1)$ известны, а $N(\alpha'_1) = N - N(\alpha_1)$, то есть:

$$\forall\ N\ \forall\ a_1, \ldots, a_N\ \forall \alpha_1 \quad \text{верна формула включений-исключений}$$

Шаг индукции Пусть на некотором шаге индукции при некотором $k \geq 1$ и для всех $n \leq k$ верно следующие утверждение

$$\forall N\ \forall a_1, \ldots, a_N\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \quad \text{верна формула включений-исключений.}$$

Необходимо показать, что в этом случае верной окажется и следующая формула:

$$\forall N\ \forall a_1, \ldots, a_N\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \quad \text{верна формула включений-исключений.}$$

Число N, объекты $a_1, \ldots, a_N$ и свойства $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ зафиксированы. Согласно предположению индукции:

$$N(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k) = N - N(\alpha_1) - \ldots - N(\alpha_k) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots N(\alpha_{k-1}, \alpha_k) - \ldots + (-1)^k N(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

Для удобства можно ввести обозначение $M = N(\alpha_{k+1})$. К M можно применить предположение индукции для свойств $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

$$M(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k) = M - M(\alpha_1) - \ldots - M(\alpha_k) + M(\alpha_1, \alpha_2) + M(\alpha_{k-1}, \alpha_k) - \ldots + (-1)^k M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Теперь необходимо переписать это выражение в терминах N. Для этого можно использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M &= N(\alpha_{k+1}) \\ M(\alpha_1) &= N(\alpha_1, \alpha_{k+1}) \\ M(\alpha_k) &= N(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ M(\alpha_{k-1}, \alpha_k) &= N(\alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ M(\alpha_1, \dots, \alpha_k) &= N(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ M(\alpha_1', \dots, \alpha_k') &= N(\alpha_1', \dots, \alpha_k', \alpha_{k+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, было получено следующее выражение:

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_k', \alpha_{k+1}) = N(\alpha_{k+1}) - N(\alpha_1, \alpha_{k+1}) - \dots - N(\alpha_k, \alpha_{k+1}) + (-1)^k N(\alpha_1, \dots \alpha_k, \alpha_{k+1})$$

Откуда искомое выражение:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1', \dots, \alpha_{k+1}') = &N(\alpha_1', \dots, \alpha_k') - N(\alpha_1', \dots, \alpha_k', \alpha_{k+1}) = \\ &= N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_k) - N(\alpha_{k+1}) + N(\alpha_1, \alpha_2) \\ &+ \dots + N(\alpha_{k-1}, \alpha_k) + N(\alpha_1, \alpha_{k+1}) + \dots + N(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \\ &- \dots + (-1)^{k+1} N(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Задача о беспорядках

Пусть у каждого человека в аудитории есть свое место. Всего мест 30. Сколько существует способов так рассадить людей по аудитории, чтобы ни один человек не сел на свое место.

В качестве объектов рассматриваются способы рассадки людей в аудитории. Свойство рассадки α_i выполнено, если i человек сидит на своем месте. Тогда согласно формуле включений-исключений, количество рассадок, где каждый человек сидит не на своем месте $N(\alpha_1', \dots, \alpha_{30}') =$

$$\begin{aligned} &= 30! - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_{30}) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{29}, \alpha_{30}) - \dots + N(\alpha_1, \dots, \alpha_{30}) = \\ &= 30! - 30 \cdot 29! + C_{30}^2 \cdot 28! - C_{30}^3 \cdot 27! + \dots + C_{30}^3 0 \cdot 0! = \\ &= 30! - 30 \cdot 29! + \frac{30!}{2!\,28!} \cdot 28! - \frac{30!}{3!\,27!} \cdot 27! + \dots + \frac{30!}{30!\,0!} \cdot 0! = \\ &= 30! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{30!} \right) \approx \frac{30!}{e}. \end{aligned}$$

(Из курса математического анализа известно: $e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{1}{30!} - \frac{1}{31!} + \dots = (2,718281828459045\dots)^{-1}$.)

Знакопеременное комбинаторное тождество

Формула включений-исключений позволяет получать знакопеременные комбинаторные тождества естественным образом. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и зафиксировано число $m < n$. В качестве множества объектов рассматривается множество всех m-размещений с повторениями из A. Объект обладает свойством α_i если объект a_i не входит в данное m-размещение.

Тогда:

$$\begin{aligned} N &= n^m \\ N(\alpha_1) &= (n-1)^m, \dots, N(\alpha_n) = (n-1)^m, \\ N(\alpha_1, \alpha_2) &= (n-2)^m, \dots, N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = (n-2)^m, \\ N(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (n-n)^m = 0. \end{aligned}$$

Количество таких m-размещений, которые содержат все элементы из A:

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_n') = 0,$$

поскольку такие размещения невозможны. С другой стороны, по формуле включений-исключений:

$$0 = C_n^0 n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - C_n^3 (n-3)^m + \dots + (-1)^n C_n^n \cdot (n-n)^n.$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^m = 0.$$