# ЛЕКЦИЯ 23

# ПРИЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ АДАМАРА К КОМБИНАТОРИКЕ

## 1. О дистанционном графе и матрицах Адамара

Сначала необходимо уточнить определенную двусмысленность, появившуюся в самом конце предыдущей лекции.

Имеется матрица Адамара, записанная в нормальной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \cdots\cdots & & & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь в первой строчке записаны все «1», а во всех остальных — по половине «1» и «$-1$».

Для графа $G\left(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$ векторы, которые образуют клику в этом графе, транслируются не на всю матрицу Адамара в нормальной форме, а только на ту ее часть, которая не содержит верхнюю строчку:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

При этом тот факт, что строчки являются попарно ортогональными, по прежнему связан с линейной алгеброй.

Таким образом, указанная часть матрицы Адамара в нормальной форме без верхней строчки как раз является максимальной кликой, причем ее размер не превосходит $n-1$.

# 2. Задача об уклонении

Есть множество, состоящее из $n$ элементов, которое можно интерпретировать как множество вершин следующего гиперграфа:

$$R_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Совокупность его подмножеств:

$$\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}.$$

При этом не предполагается, что мощности различных подмножеств $M_i$ — одинаковы.

Хочется научиться красить вершины этого гиперграфа в два цвета так, чтобы каждое ребро содержало примерно одинаковое количество вершин каждого из двух цветов.

Сформулируем строго. Пусть есть отображение $\chi$ такое, что:

$$\chi: \ R_n \to \{1, -1\}.$$

Определим еще одну функцию:

$$\tilde{\chi}(M_i): \sum_{\nu \in M_i} \chi(\nu).$$

Если вершин примерно поровну, то:

$$\tilde{\chi}(M_i) \to 0.$$

***Определение 43:*** *Величиной, характеризующей максимальное* ***уклонение*** *(по-английски — discrepancy) будет называться следующее:*

$$disc(\mathcal{M}, \chi) = \max_{i=1,\ldots,m} \left|\tilde{\chi}(M_i)\right|.$$

Тогда для совокупности обозначим:

$$disc(\mathcal{M}) = \min_{\chi} disc(\mathcal{M}, \chi).$$

Таким образом:

$$disc(\mathcal{M}) \leqslant \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \chi: \text{ все } \left|\tilde{\chi}(M_i)\right| \leqslant \ldots,$$

и аналогично:

$$disc(\mathcal{M}) \geqslant \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \chi: \text{ есть } i: \left|\tilde{\chi}(M_i)\right| \geqslant \ldots .$$

**Теорема 70**

$$\forall n, m \ \forall \mathcal{M}: \ disc(\mathcal{M}) \leqslant \sqrt{2n \ln(2m)}.$$

Теорема поясняется рисунком 23.1: на рисунке показано, что общее число «сарделек» —$n$, и при этом можно так присвоить цвета элементам этой «лоханки», чтобы каждое множество разрезалось почти пополам на условно красную и условно синюю часть.

Запишем тогда теорему, напоминающую рассмотренную ранее «задачу о пьянице и кабаке»:

**Теорема 71 (О большом уклонении)** Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, принимающие следующие значения:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 \text{ с вероятностью } \dfrac{1}{2}, \\ -1 \text{ с вероятностью } \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда:

$$P\Big(\xi_1 + \cdots + \xi_n \geqslant a\Big) \leqslant \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$

**Замечание** Ввиду симметрии можно также записать:

$$P\Big(\big|\xi_1 + \cdots + \xi_n\big| \geqslant a\Big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$

Теперь, используя теорему 71, докажем теорему 70:

**Док-во:** Фиксируем величины:

$$n, \quad m, \quad \mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}.$$

Рассмотрим случайную раскраску $\chi$, то есть:

$$P\Big(\chi(i) = 1\Big) = \frac{1}{2},$$

$$P\Big(\chi(i) = -1\Big) = \frac{1}{2},$$

и случайные величины $\chi(1), \ldots, \chi(n)$ — независимы в совокупности.

Тогда в новых терминах:

$$\left|\tilde{\chi}(M_i)\right| = \left|\sum_{\nu \in M_i} \chi)(\nu)\right|.$$

Значит, вероятность:

$$P\left(\left|\tilde{\chi}(M_i)\right| \geqslant \sqrt{2n\ln(2m)}\right) = P\left(\left|\sum_{\nu\in M_i} \chi(\nu)\right| \geqslant \sqrt{2n\ln(2m)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left(-\frac{2n\ln(2m)}{2|M_i|}\right) \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}.$$

Вероятность существования $M_i$:

$$P\left(\exists M_i : \left|\tilde{\chi}(M_i)\right| \geqslant \sqrt{2n\ln(2m)}\right) \leqslant \sum_{M_i} P\left(\left|\tilde{\chi}(M_i)\right| \geqslant \sqrt{2n\ln(2m)}\right) <$$

$$< m \cdot \frac{1}{m} = 1,$$

что и требовалось доказать. ■

Любопытно, что в некоторых специальных случаях эту оценку оказывается возможным уточнить:

**Теорема 72 (Джоел Спенсер)** Если $m = n$, то:

$$\forall \mathcal{M}: \ disc(\mathcal{M}) \leqslant 6\sqrt{n}.$$

**Теорема 73** Если для данного $n$ существует матрица Адамара порядка $n$, и при этом $n = m$, то:

$$\exists \mathcal{M}: \ disc(\mathcal{M}) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

**Док-во:** Пусть $H$ — матрица Адамара порядка $n$ в нормальной форме (предполагая ее существование). Тогда:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & & \ldots\ldots & & & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & 1 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & \end{pmatrix}$$

Значит утверждение:

$$disc(\mathcal{M}) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$$

равносильно утверждению:

$$\exists \text{ матрица } A \text{ из нулей и единиц}: \ \forall \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n), \ v_i \in \{0, 1\} \ A\vec{v}$$

$$\text{имеет хотя бы одну координату, по модулю большую, чем } \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Помножим матрицу $A$ на вектор:

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & & .. & \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 & \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Пусть:

$$M_1 = (110\ldots1\ldots),$$

$$M_2 = (011\ldots01)$$

и так далее (присвоим каждому $M_i$ $i$-ю строку матрицы $A$). Тогда:

$$M_1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \tilde{\chi}(M_1),$$

и так далее, то есть:

$$A\vec{v} = \left(\tilde{\chi}(M_1), \ldots, \tilde{\chi}(M_n)\right).$$

Далее сделаем из данной матрица Адамара $H$ матрицу из нулей и единиц по принципу:

$$\frac{H + J}{2},$$

где $J$ — матрица, состоящая только из единиц.

Разобьем оставшееся доказательство на две части.

Первая часть. Рассмотрим произведение:

$$H\vec{v} = (L_1, \ldots, L_n).$$

С другой стороны, обозначим столбцы матрицы $H$:

$$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n.$$

Так как:

$$H\vec{v} = v_1\overline{x}_1 + \cdots + v_n\overline{x}_n = (L_1, \ldots, L_n),$$

то найдем скалярное произведение:

$$\Big(H\vec{v}, H\vec{v}\Big) = L_1^2 + \cdots + L_n^2 = (v_1\overline{x}_1 + \cdots + v_n\overline{x}_n, v_1\overline{x}_1 + \cdots + v_n\overline{x}_n) = \\ = v_1^2 \cdot n + v_2^2 \cdot n + \cdots + v_n^2 \cdot n.$$

Заметим, что:

$$v_1^2 = v_2^2 = \cdots = v_n^2,$$

а значит:

$$\Big(H\vec{v}, H\vec{v}\Big) = v_1^2 \cdot n + v_2^2 \cdot n + \cdots + v_n^2 \cdot n = n^2.$$

Следовательно:

$$\exists i: \ L_i^2 \geqslant n \Rightarrow \quad \exists i: \ \big|L_i\big| \geqslant \sqrt{n}.$$

Вторая часть. Запишем теперь:

$$(H+J)\vec{v} = \Big(L_1 + \lambda, L_2 + \lambda, \ldots, L_n + \lambda\Big),$$

где:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Заметим, что $\lambda$ — точно четное число, так как для матриц Адамара:

$$n \equiv 0(4).$$

Рассмотрим скалярный квадрат:

$$\Big((H+J)\vec{v}, (H+J)\vec{v}\Big) = L_1^2 + \cdots + L_n^2 + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} L_i + \lambda^2 \cdot n.$$

Введем обозначение:

$$H = (h_{i,j}).$$

Тогда:

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n} L_{1j}v_j.$$

Значит:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} L_{ij}v_j = v_{1n} = \pm n.$$

Тогда:

$$\Big((H+J)\vec{v}, (H+J)\vec{v}\Big) = n^2 \pm 2\lambda n + \lambda^2 \cdot n.$$

Также необходимо отметить, что:

$$\lambda_{\min} = \mp 1.$$

Но $\lambda$ — четное, значит, минимальное значение достигается только в трех точках — $-2, 0, 2$. Подставив поочередно эти точки, увидим, что:

$$n^2 \pm 2\lambda n + \lambda^2 \cdot n \geqslant n^2.$$

Дальнейшее рассуждение проводится аналогично первой части доказательства.

Значит, теорема доказана ■

**Следствия:**

$$\forall n\ \exists \mathcal{M} \geqslant (1+o(1))\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

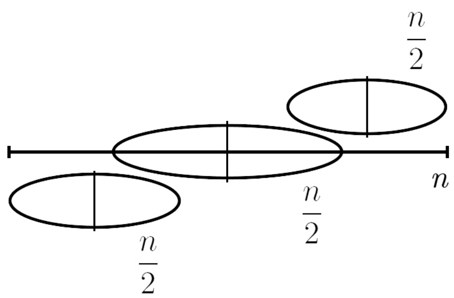


Рис. 23.1