ЛЕКЦИЯ 1

Преобразования Лоренца. Принцип относительности

1.1. Принцип относительности

Специальная теория относительности (СТО) — современная теория пространства и времени. Это название не совсем корректное. При дальнейшем изучении мы увидим, что в этой теории есть как относительные, так и инвариантные явления.

Многочисленные экспериментальные факты описываются в едином пространстве-времени. Каковы свойства этого пространства-времени? Прежде всего, чтобы судить о пространстве, наблюдатель должен быть свободен от внешних воздействий. Поэтому первый постулат, который мы примем:

Утверждение 1.1 (Закон инерции)**.** Существуют **инерциальные системы координат**, в которых тело может сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения пока на него не подействуют силы.

Если же вы находитесь в неинерциальной системе координат, то для того, чтобы покоиться, необходимо наличие связей, реакций связей, которые будут искажать представление о пространстве.

Какие же системы инерциальны? Геоцентрическая система не является инерциальной, ускорение, связанное с вращением Земли, легко обнаружить с помощью маятника Фуко. Гелиоцентрическая система близка к ИСО. По-видимому, идеальная ИСО — система отсчета, в которой реликтовое излучение (равновесное излучение, оставшееся от горячей стадии нашей Вселенной) изотропно. Сформулируем еще несколько положений:

Утверждение 1.2 (Пространство однородно)**.** Физические явления в ИСО не зависят от того, в какой точке пространства производятся наблюдения.

Утверждение 1.3 (Пространство изотропно)**.** Свойства пространства в ИСО по всем направлениям одинаковы.

Разумеется, если бы вы находились в неинерциальной системе отсчета, например, в СО, движущейся с постоянным ускорением, свойства пространства были бы различны в различных направлениях.

Утверждение 1.4 (Время однородно)**.** Физические законы с течением времени не меняются.

Все эти утверждения являются **опытными фактами**, проверенными экспериментами. В начале XX века Дираком, Гамовым высказывались гипотезы, что мировые константы со временем меняются. Проверить эту гипотезу получилось следующим образом.

Африканская страна Габон поставляла Франции урановую руду. Было обнаружено, что в этой руде содержание изотопов ^{235}U понижено, что являлось уникальным фактом. Также в этой руде были обнаружены изотопы, характерные для работы ядерного реактора. Оказалось, что в Африке примерно 1,5 млрд. лет назад в течение полумиллиарда лет действовал природный ядерный реактор. По резонансным (идущим при одинаковых энергиях) реакциям определи, что за 1,5 млрд. лет мировые константы не изменились по крайней мере на одну стотысячную долю.

В последние годы ученые обратили внимание на спектр звезд, расположенных в нескольких миллиардах световых лет от нас. Измерив постоянную тонкой структуры этого спектра, ученые сделали вывод, что, если изменение мировых констант и произошло, то оно крайне мало.

Из утверждений 1.2–1.4 следуют **законы сохранения**. Так, из однородности пространства следует закон сохранения импульса, из изотропности пространства — закон сохранения момента импульса, а из однородности времени — закон сохранения энергии. Таким образом, постулаты 1.2–1.4 соблюдаются с той точностью, с которой соблюдаются перечисленные законы сохранения. Сформулируем еще один постулат:

Утверждение 1.5 (Принцип относительности)**.** Если есть две системы, из которых одна движется относительно другой равномерно и прямолинейно, то все физические законы в этих системах одинаковы.

Помимо этих предположений существуют также и другие. Например, считается, что **пространство и время непрерывны** — не существует дискретных промежутков длины, времени. Вообще говоря, идея квантования времени возникла еще в Древней Греции вместе с атомистической теорией. Существовало даже название для кванта времени — хронон.

Наблюдения на коллайдерах показывают, что пространство непрерывно, по крайней мере, до расстояний порядка 10^{-16}см — расстояния, которое пролетают промежуточные бозоны, переносящие слабое взаимодействие. Соответственно, с точностью до этого расстояния, деленного на скорость света, то есть до 10^{-26}с мы знаем, что время непрерывно.

В наблюдениях физические законы и геометрия пространства неотделимы друг от друга (хотя, воспользовавшись законами сохранения можно выделить чисто пространственные вещи, а остальное отнести к физике). Одним из крупнейших достижений конца предыдущего и начала нынешнего века было установление, с помощью наблюдения за реликтовым излучением, что **геометрия пространства евклидова** до расстояния порядка 10^{28}см. Итак, свойства пространства проверены, евклидовы на расстояниях 10^{-16}–10^{28}см.

Сформулируем очень важное следствие принципа относительности:

Следствие 1.1 (Пространство относительно)**.** *Если два события происходят в разные моменты времени (под событием подразумевается нечто, происходящее в некоторой точке пространства в некоторый момент времени), то в одной системе координат эти события могут произойти в одном и том же месте, а в другой системе координат — в разных местах.*

Например, вы едете в поезде, берете со столика стакан с чаем, делаете глоток и ставите стакан на место. Для вас эти события произошли в одном и том же месте, а для наблюдателя на платформе — в разных местах. Далее мы увидим, что и время относительно.

Существует **проблема синхронизации часов** в разных точках пространства. Для ее решения было создано соглашение о синхронизации времени: часы считаются синхронизированными, если процедура синхронизации была проведена одним из следующих способов:

1. Из т. A в т. B в некоторый момент времени t_1 посылается световой сигнал, который отражается в т. B и возвращается обратно за время T. Тогда на часах в т. B нужно установить время $t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$ (см. рис. 1.1).
2. Из т. C, находящейся в середине отрезка AB посылается сигнал (не обязательно световой). Тогда в точки A и B сигнал придет одновременно (см. рис. 1.2).

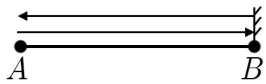

Рис. 1.1.

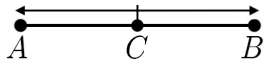

Рис. 1.2.

Перейдем к установлению основного соотношения специальной теории относительности.

1.2. Преобразования Лоренца

Пусть есть две системы координат K и K', одна из которых движется относительно другой с некоторой постоянной скоростью. Примем направление этой скорости совпадающим с осью X (см. рис. 1.3). Когда точки O и O' совпадут, можем установить часы в с системах K и K':

$$t_O = t'_{O'} = 0.$$

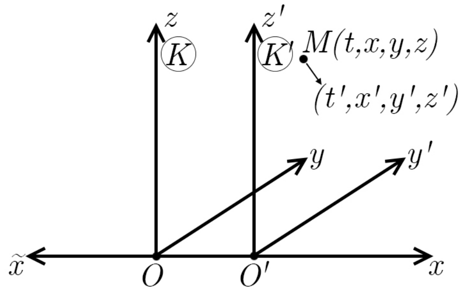

Рис. 1.3.

Поскольку системы K и K' равноправны, синхронизация часов в них теперь должна проводиться независимо.

Пусть в системе K произошло событие M с координатами (x, y, z) в момент времени t: $M(t, x, y, z)$. Попробуем найти координаты этого же события M в системе K': $M(t', x', y', z')$. Эта связь и будет называться **преобразованиями Лоренца**.

Соотношения между t, x, y, z и t', x', y', z' должны быть линейными в силу однородности пространства и времени (нелинейные соотношения были бы различны в разных точках пространства и времени).

Рассмотрим точку O' в системах K и K'. $x_{O'} = v\,t$, поэтому

$$\left.\begin{array}{r} K : x_{O'} - v\,t = 0 \\ K' : x'_{O'} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad x' = \alpha\,(x - v\,t).$$

В силу однородности пространства и времени коэффициент α не может зависит ни от координат, ни от времени, но может зависеть от скорости: $\alpha = \alpha(v)$. Для осей Y и Z, в силу изотропности пространства, коэффициент буден одинаковый:

$$y' = k(v)\,y, \;\; z' = k(v)\,z.$$

Время t' в системе отсчета K' линейно зависит от x, t:

$$t' = \delta(v)\,x + \gamma(v)\,t.$$

В курсе линейной алгебры существует понятие группы, которое может помочь нам в определении неизвестных коэффициентов.

Определение 1.1. Пусть есть некоторое множество элементов, например, матрицы преобразования (t, x, y, z) к (t', x', y', z'). Если на этом множестве определено произведение любых двух элементов, существует тождественный элемент (единица) и обратный элемент (произведение которого на исходный равно единице), то такое множество называется группой.

Преобразования от одной системы координат к другой должны составлять группу, потому что преобразования от системы K' и K должны иметь такой же вид, что и преобразования от системы K и K', только с изменением скорости. Поэтому можем записать следующее:

$$\begin{aligned} x &= \alpha(-v)\,(x' + v\,t'),\\ t &= \delta(-v)\,x' + \gamma(-v)\,t',\\ y &= k(-v)\,y',\\ z &= k(-v)\,z'. \end{aligned}$$

Введем системы координат $\tilde{K}$ и $\tilde{K'}$, которые отличаются от K и K' лишь тем, что в них направление оси X изменено на противоположное. Теперь система $\tilde{K'}$ движется относительно $\tilde{K}$ со скоростью $-v$. С учетом того, что синхронизация часов и направление осей Y и Z не изменились, получим, что

$$\begin{aligned} \tilde{x'} &= \alpha(-v)\,(\tilde{x} + v\,t),\\ t' &= \delta(-v)\,\tilde{x} + \gamma(-v)\,t,\\ y' &= y,\ \tilde{y'} = k(-v)\,\tilde{y},\\ z' &= z,\ \tilde{z'} = k(-v)\,\tilde{z}. \end{aligned}$$

Так как y и y' не изменились, то $k(-v) = k(v)$.

$$\tilde{x'} = -x' \quad \Rightarrow \left| \begin{aligned} -x' &= \alpha(-v)\,(-x + v\,t),\\ x' &= \alpha(v)\,(x - v\,t), \end{aligned} \right| \Rightarrow \quad \alpha(-v) = \alpha(v).$$

Проделав то же самое со временем, получим:

$$\begin{aligned} \gamma(-v) &= \gamma(v),\\ \delta(-v) &= -\delta(v). \end{aligned}$$

Обратные преобразования Лоренца теперь запишутся в виде:

$$\begin{aligned} x &= \alpha(v)\,(x' + v\,t'),\\ t &= -\delta(v)\,x' + \gamma(v)\,t',\\ y &= k(v)\,y',\\ z &= k(v)\,z'. \end{aligned}$$

Из прямого преобразования мы знаем, что $y = \frac{1}{k(v)}y'$, следовательно $k^2(v) = 1$, то есть $k = 1$. Получается, что поперечные масштабы у обеих систем одинаковые. Решим исходную систему уравнений относительно x, t.

$$\begin{cases} x' = \alpha\,(x - v\,t),\\ t' = \delta(v)\,x + \gamma(v).\,t \end{cases}$$

Воспользовавшись матричным методом решения систем, получим

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x' & -\alpha\, v \\ t' & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha\, v \\ \delta & \gamma \end{vmatrix}} = \frac{\gamma\, x' + \alpha\, v\, t'}{\alpha\, \gamma + \alpha\, \delta\, v};$$

в этом выражении $x' + v\, t'$ выделится только тогда, когда $\alpha = \gamma$. В этом случае

$$x = \frac{x' + v\, t'}{\gamma\left(1 + \dfrac{\delta}{\gamma} v\right)},$$

а поскольку $\frac{\delta(v)}{\gamma(v)}$ — нечетная фукнция, поэтому можем записать ее так:

$$\frac{\delta(v)}{\gamma(v)} = -v\, f(v^2).$$

Тогда

$$x = \frac{x' + v\, t'}{\gamma(1 - v^2\, f(v^2))} = \gamma(x' + v\, t');$$

из этого равенства получаем, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2\, f(v^2))}}.$$

Решив систему уравнений относительно t увидим, что условие $\gamma = \alpha$ и нечетность соответствующего коэффициента более ничего интересного не дают.

$$t = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & x' \\ \delta & t' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha\, v \\ \delta & \gamma \end{vmatrix}} = \frac{\alpha\, t' - \delta\, x'}{\alpha\, \gamma + \alpha\, \delta\, v} = \frac{t' - \frac{\delta}{\gamma}\, x'}{\gamma(1 + \frac{\delta}{\gamma}\, v)} = \frac{t' + v\, x'\, f}{\sqrt{(1 - v^2\, f(v^2))}}.$$

Пусть система K_1 движется относительно K со скоростью v_1, а система K_2 движется относительно K_1 со скоростью v_2 (см. рис. 1.4). Преобразования координат от K к K_2 должны иметь такой же вид, что и от K к K_1, но должна быть подставлена относительная скорость. Найдем скорость движения K_2 относительно K. Матрица преобразования от K_2 к K_1:

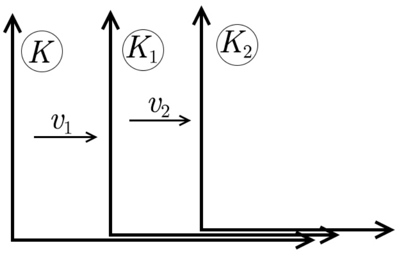

Рис. 1.4.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\, v_2 \\ -\gamma_2\, v_2\, f_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования от K_1 к K:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\, v_1 \\ -\gamma_1\, v_1\, f_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица преобразования от K_2 к K будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\, v_2 \\ -\gamma_2\, v_2\, f_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\, v_1 \\ -\gamma_1\, v_1\, f_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получим, что

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_1\,\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 + v_1\, v_2\, f_1 & -(v_1 + v_2) \\ -(v_1\, f_1 + v_2\, f_2) & 1 + v_1\, v_2\, f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix},$$

но, с другой стороны, матрица преобразования от K_2 к K может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_3 & -\gamma_3\, v_3 \\ -\gamma_3\, v_3\, f_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы преобразования диагональные элементы равны, следовательно они должны быть равны и у любой другой матрицы преобразования от K_2 к K, поэтому

$$1 + v_1\, v_2\, f_1 = 1 + v_1\, v_2\, f_2 \quad \Rightarrow \quad f(v_1^2) = f(v_2^2) = \text{const}.$$

Сравнивая две матрицы перехода, можем заметить, что

$$\left.\begin{aligned} \gamma_3 &= \gamma_1\,\gamma_2 (1 + v_1\, v_2\, f), \\ -\gamma_3\, v_3 &= -\gamma_1\,\gamma_2 (v_1 + v_2), \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1\, v_2\, f}.$$

Можем теперь записать преобразования Лоренца для x и t в виде:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - v^2\, f}},$$
$$t' = \frac{t - v\,x\,f}{\sqrt{1 - v^2\, f}}.$$

В частном случае, когда $f = 0$, преобразования Лоренца переходят в **преобразования Галилея**

$$x' = x - v\,t,$$
$$t' = t.$$

Какова же размерность f? Поскольку произведение $v^2\, f$ есть число, то

$$[f] = \frac{1}{c^2},$$

где c — некоторая постоянная скорость.

Следовательно, **существует предельная скорость относительного движения**. Существование предельной скорости относительного движения было проверено экспериментально (см. рис. 1.5). Два датчика, расположенных на расстоянии l и синхронизированных по времени, регистрируют время, за которое частицы из ускорителя пролетают это расстояние. Опыт показывает, что предельная скорость относительного движения существует.

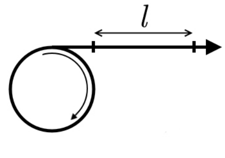

Рис. 1.5.

График зависимости скорости частицы от ее энергии представлен на рис. 1.6. Максимальная предельная скорость, которой удалось достигнуть такова, что

$$1 - \frac{v}{c} < 10^{-11}.$$

Определение 1.2. Принцип относительности Пуанкаре – Эйнштейна — это принцип относительности, дополненный фактом существования предельной скорости относительного движения.

В силу принципа относительности **предельная скорость** должна быть **одинакова во всех инерциальных системах отсчета** (иначе мы бы смогли их различать). Покажем, что это действительно так. Пусть система K_2 движется со скоростью $v_2 \to c$. Тогда

$$v_3 = \frac{v_1 + c}{1 + \dfrac{v_1 c}{c^2}} \to c.$$

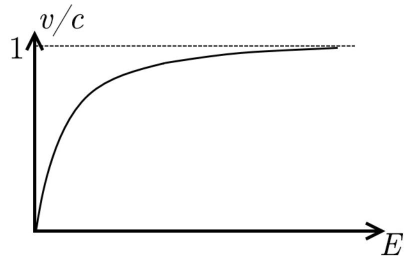

Рис. 1.6.

Одинаковость предельной скорости во всех системах координат приводит к **относительности времени**. Рассмотрим две системы: K и K' (см. рис. 1.7). Пусть время на средних часах совпадает в системах K и K', все трое часов в системе K' синхронизированы (методом, представленным на рис. 1.2) и средние часы каждой из систем находятся в начале координат. Пусть, как и ранее, система K' движется относительно K со скоростью v. Тогда часы в системе K покажут разное время — левые часы покажут меньшее время, а правые — большее в соответствии с

$$t = \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Дело в том, что для наблюдателя в системе K часы в K' не синхронизированы: ведь для него правые часы в системе K' «убегали» от сигнала, а значит сигнал пришел позже, а левые «догоняли» сигнал, поэтому для наблюдателя в K этот сигнал поступил раньше.

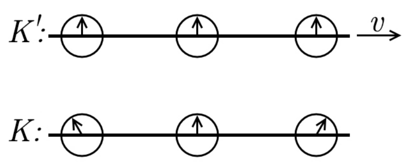

Рис. 1.7.